Méthodes d'études de suites numériques

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite étudiée.

I On reconnait une suite du cours

1. **La suite est arithmétique ou géométrique**
   Les résultats sont directs.
2. **La suite est arithmético-géométrique, $u_{n+1} = au_n + b$**
   On cherche le point fixe ω puis on définit $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \omega$ et on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. **La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$**
   On regarde l'équation caractéristique associée et suivant son discriminant, on obtient une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de deux constantes λ et μ que l'on détermine à l'aide des premiers termes u_0 et u_1.

II La suite est explicite, $u_n = f(n)$

Ici f est une fonction.

1. **Définition**
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie si f est définie sur $\mathbb{N}$. Eventuellement $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0 si f est définie sur $[\![n_0\,;+\infty[\![$ en particulier si elle est définie sur $[n_0\,;+\infty[$.
2. **Bornitude**
   Si f est bornée/majorée/minorée sur $\mathbb{N}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée/majorée/minorée.
3. **Monotonie**
   Si f est monotone (strictement) sur $\mathbb{R}_+$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi monotone (strictement) et de même monotonie que f.
4. **Convergence**
   Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors, par caractérisation séquentielle de la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

III La suite est implicite, u_n est solution d'une équation $f_n(x) = 0$

Ici f_1, f_2, f_3, ... sont des fonctions. Eventuellement la suite est définie comme solution de $g_n(x) = a$ ou $a \in \mathbb{R}$, ce qui se ramène à $f_n(x) = 0$ en posant $f_n = g_n - a$.

1. **Définition**
   A n fixé, on utilise le théorème de la bijection pour démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution.
2. **Bornitude**
   Si par exemple f_n est strictement croissante et si $f_n(a) < 0$ alors $f_n(a) < f_n(u_n)$ et donc $a < u_n$. Même raisonnement pour montrer que $u_n < b$. On peut aussi l'adapter si f_n est strictement décroissante.
3. **Monotonie**
   Si par exemple f_n est strictement croissante et si $f_n(u_{n+1}) < 0$ alors $u_{n+1} < u_n$ et si ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. On peut raisonner de la même façon si $f_n(u_{n+1}) > 0$ ou si f_n est strictement décroissante ou on peut aussi parler de la monotonie de f_{n+1} et regarder $f_{n+1}(u_n)$ par rapport à $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

IV La suite est récurrente, $u_{n+1} = f(u_n)$

Ici f est une fonction.

1. **Définition**
   Si on montre que U est une partie stable de f : $f(U) \subseteq U$ et si $u_0 \in U$ (ou u_{n_0}), alors on démontre par récurrence (à faire !) que la suite est bien définie et à valeurs dans U.
2. **Bornitude**
   On applique le même principe que ci-dessus avec un ensemble éventuellement V plus petit, et donc précis, que U. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in V$ est encadré par $\inf(V)$ et $\sup(V)$.
3. **Monotonie**
   - Si f est (strictement) croissante alors, on démontre par récurrence (à faire !) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) monotone et sa monotonie est donnée par la comparaison de u_0 et u_1 (croissante si $u_0 \leqslant u_1$, décroissante si $u_0 \geqslant u_1$ en adaptant pour la stricte monotonie).
   - Si f est (strictement) décroissante alors la fonction $f \circ f$ est (strictement) croissante et on applique le raisonnement précédent aux suites des termes pairs $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et des termes impairs $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ car alors $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ et on peut espérer que ces suites sont adjacentes.
   - Etudier le signe de $f(x) - x$.
4. **Convergence**
   - Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors ℓ est nécessairement un point fixe de f : $f(\ell) = \ell$. Par contraposée, on a donc aussi que si f n'admet pas de point fixe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   - Si f est k-lipschitzienne, avec $k \in]0\,;1[$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est contractante (en prenant $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$,
   $$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leqslant k\,|u_n - u_{n-1}| \leqslant \ldots \leqslant k^n\,|u_1 - u_0|\,.$$
   Si f admet un point fixe là où elle est contractante, on a aussi (en prenant $x = u_{n-1}$ et $y = \ell$)
   $$|u_n - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k\,|u_{n-1} - \ell| \leqslant \ldots \leqslant k^n\,|u_0 - \ell|\,.$$
   Ce qui par passage à la limite permet de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

V Autres techniques ou techniques transverses

1. Montrer que la suite est majorée/minorée/encadrée par des suites intéressantes et utiliser **le théorème d'encadrement** (utile souvent pour des suites définies comme étant des sommes).
2. Montrer que la suite est monotone (direct, par différence, par quotient lorsqu'elle est de signe constant) et majorée/minorée et utiliser **le théorème de la limite monotone**.
3. Rechercher un équivalent pour déterminer la limite d'une suite.
4. Utiliser une sous-suite divergente ou des sous-suites ne convergeant pas vers le même limite pour montrer que la suite diverge.